PROGRAMME DE COLLE - SEMAINE N° 7: du 11/11/2024 au 15/11/2024

Connaissances minimales attendues

Chapitre 4 - Calculs matriciels : révisions et compléments. Diagonalisation

Se reporter à un programme de colles précédent.

Chapitre 5 - Séries numériques réelles

Se reporter à un programme de colles précédent.

Chapitre 6 - Probabilités discrètes

- Ensemble fini, cardinal d'un ensemble fini ;
- Ensemble dénombrable, ensemble au plus dénombrable ;
- Les trois grands principes du dénombrement : principe de bijection, principe multiplicatif, principe additif ;
- Permutation d'un ensemble. Définition. Si E est un ensemble fini de cardinal n, une permutation de E peut être assimilée à une n-liste d'éléments distincts de E, et réciproquement ;
- Nombre de permutations d'un ensemble fini ;
- p-combinaison d'un ensemble E ;
- Coefficient binomial $\binom{n}{p}$: définition, expression avec le symbole factorielle, propriétés de symétrie, relation de Pascal, formules dites « d'inversion » ;
- **(HP)** Relation de Pascal généralisée ;
- Formule du binôme de Newton (dans le contexte des nombres réels) ;
- **(HP)** Formule de Vandermonde ;
- Expérience aléatoire, univers Ω des résultats possibles ;
- **(HP)** Tribu sur un ensemble-univers Ω, événement ;
- Espace probabilisable ;
- Événement impossible, événement certain, événement élémentaire ;
- Intersection (généralisée) d'événements, réunion (généralisée) d'événements ;
- Complémentaire d'un événement ;
- Propriétés de distributivité généralisée de $\cap$ sur $\cup$ et de $\cup$ sur $\cap$;
- Lois de De Morgan généralisées ;
- Événements incompatibles, événements deux à deux incompatibles ;

- Systèmes complets d'événements ;
- Probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$, propriété de σ-additivité ;
- Probabilité du complémentaire d'un événement ;
- Formule du crible dans le cas d'une réunion de 2 ou 3 événements ;
- Événement quasi-certain, événement quasi-impossible ;
- Équiprobabilité, probabilité uniforme sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$;
- Indépendance de 2 événements, indépendance 2 à 2 d'une famille d'événements, indépendance mutuelle d'une famille d'événements ;
- Indépendance et passage au complémentaire ;
- Probabilité d'un événement B sachant un événement A, notation $\mathbb{P}_A(B)$;
- $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ (si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $A \in \mathcal{T}$ vérifiant $\mathbb{P}(A) \neq 0$) ;
- Formule des probabilités composées ;
- Formule des probabilités totales sans et avec conditionnement ;
- Formule de Bayes ;
- **(HP)** Théorèmes de limite monotone dans le contexte des probabilités et ses corollaires fondamentaux.
- **(HP)** Conditions suffisantes de quasi-certitude, conditions suffisantes de quasi-impossibilité. Pratique sur des exemples.
- Variables aléatoires réelles, variables aléatoires réelles discrètes, variables aléatoires réelles discrètes finies, variables aléatoires réelles discrètes non finies ;
- Ensemble-image d'une variable aléatoire ;
- Notations $[X \leqslant x]$, $[X < x]$, $[X = x]$, $[X \in I]$;
- Si X est une variable aléatoire discrète $\{ [X = x],\ x \in X(\Omega) \}$ forme un système complet d'événements ;
- Loi d'une variable aléatoire réelle discrète ;
- Suite réelle définissant une loi de probabilité discrète finie/ non finie ;
- Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors :
  * $\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1)$;
  * $\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$.
- Loi conditionnelle d'une variable aléatoire discrète sachant un événement A
- Variables aléatoires discrètes indépendantes ;
- Indépendance mutuelle d'une suite (indexée par un ensemble au plus dénombrables) de variables aléatoires réelles discrètes ;
- Transformée $g(X)$ d'une variable aléatoire réelle discrète X ;

- Expression de la loi de $g(X)$ en fonction de la loi de X ;
- Transformée $g(X, Y)$ d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes (X, Y), transformée $g(X_1, \ldots, X_n)$ d'un n-uplet de variables aléatoires réelles discrètes $(X_1, \ldots, X_n)$;
- Programme de ECG1 concernant les variables aléatoires discrètes (espérance et variance d'une variable aléatoire discrètes, lois usuelles discrètes (définition, « schéma », formulaire usuel)).

Savoir-faire et Méthodes à savoir appliquer

« Les incontournables »

- « Les incontournables » du programme de colle précédent sont toujours au programme ;
- Étudier la nature d'une série :
  * ... en mettant en évidence une divergence grossière (lorsque le terme général ne tend pas vers 0) ;
  * ... en reconnaissant une série usuelle (géométrique, géométrique dérivée d'ordre 1, dérivée d'ordre 2, exponentielle, Riemann) ;
  * ... en reconnaissant une combinaison linéaire de séries convergentes, à d'éventuels changement d'indice par translation près ;
  * ... en reconnaissant une série télescopique ;
  * ... en appliquant un critère de comparaison (par inégalité , par négligeabilité, par équivalence) ;
  * ... en justifiant que la série est à termes positifs et en étudiant le caractère majoré ou non de la suite des sommes partielles ;
  * ... en montrant que la série est absolument convergente.
- Calculer la somme d'une série convergente.
- Effectuer quelques calculs simples mais un minimum formalisés de dénombrement ;
- Dans le but de calculer la probabilité d'un événement, les élèves doivent être capables :
  * ... de déterminer (ie écrire) l'univers associé à certaines expériences aléatoires simples ;
  * ... de construire des espaces probabilisés finis simples en situation d'équiprobabilité ;
  * ... de calculer les cardinaux de quelques ensembles finis, à l'aide des techniques générales de dénombrement ;
  * ... de calculer à la main des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ où $n < 6$ et les coefficients binomiaux $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{2}$;
  * ... d'écrire un événement comme réunion/intersection/complémentaire d'événements auxiliaires ;
  * ... de mettre en évidence et d'utiliser l'incompatibilité 2 à 2 de plusieurs événements ;
  * ... de justifier *a priori* et/ou *a posteriori* l'indépendance de certains événements et de l'utiliser dans les calculs ;
  * ... d'utiliser une hypothèse d'équiprobabilité ;
  * ... d'appliquer la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales suivant les modèles de rédaction donnés en cours ;
  * ... d'utiliser à bon escient la propriété de σ-additivité de toute application probabilité $\mathbb{P}$;
  * ... de montrer qu'un événement est quasi-certain/ quasi-impossible (sans utiliser les théorèmes de limite monotone désormais **(HP)**).
- Déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle discrète X :
  * ... en explicitant $X(\Omega)$ puis en calculant « naïvement » $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$;
  * ... en reconnaissant de manière précise et argumentée une loi usuelle discrète ;

  * ... en calculant $\mathbb{P}(X > k)$ ou $\mathbb{P}(X \leqslant k)$, pour en déduire ensuite $\mathbb{P}(X = k)$ à l'aide d'une formule adéquate (utile pour le calcul de la loi d'un min ou d'un max) ;
  * ... en reconnaissant la loi d'une transformée d'une variable aléatoire discrète dont on connaît la loi.

- Savoir calculer l'espérance (sous réserve d'existence) d'une variable aléatoire discrète :
  * ... en reconnaissant l'espérance d'une variable aléatoire discrète suivant une loi usuelle ;
  * ... en revenant à la définition de l'espérance ;
  * ... en utilisant la propriété de linéarité de l'espérance ;
  * ... en utilisant le théorème de transfert ;
  * ... en utilisant la fonction d'anti-répartition (dans le cas où $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$).
- Savoir calculer la variance (sous réserve d'existence) d'une variable aléatoire discrète :
  * ... en reconnaissant la variance d'une variable aléatoire discrète suivant une loi usuelle ;
  * ... en revenant à la définition de la variance ;
  * ... en utilisant la formule de Koenig-Huygens ;
  * ... en reconnaissance une transformée affine d'une variable admettant une variance.

« Et plus si affinités ... »

- Manipuler les définitions formelles des chapitres 4, 5 et 6 afin de montrer des résultats théoriques généraux ;
- Utiliser/illustrer les résultats de convergence commutative des séries absolument convergentes et le théorème de réarrangement de Riemann ;
- Utiliser (de manière plus ou moins guidée) « une formule de type Taylor-Lagrange avec reste intégrale » pour montrer la convergence d'une série ;
- Utiliser « une comparaison série-intégrale » pour étudier la nature d'une série ;
- Utiliser de manière autonome le principe de dénombrement dit de bijection dans des situations non triviales ;
- Utiliser la formule de Vandermonde, ou montrer des identités sommatoires du même accabit ;
- Appliquer de manière autonome les théorèmes de limite monotone.

Preuves exigibles

Propositions

1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A **[A]**.
2. **(HP ?)** Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n. **[A]**
3. Théorème spectral (preuve dans le cas « $n = 2$ » seulement) **[A]**.
4. **(HP ?)** Une matrice carrée d'ordre n possédant n valeurs propres deux à deux distinctes est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1 **[A]**.
5. **(HP)** Une matrice carrée d'ordre n possédant une unique valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si elle est égale à λI_n **[C]**.
6. **(HP)** Convergence vers 0 de la suite des restes d'une série convergente **[C]** ;
7. Condition nécessaire de convergence dans le contexte des séries **[A]** ;
8. Convergence des séries géométriques et géométriques dérivées d'ordre 1, expression de la somme **[A]** ;
9. Critère de convergence des séries de Riemann **[A]** ;
10. Les trois critères de comparaison (par inégalité, par négligeabilité, par équivalence) dans le contexte des séries à termes positifs **[A]**.
11. Expression des coefficients binomiaux à l'aide de la factorielle **[A]**.
12. Relation de Pascal **[A]** et **(HP)** relation de Pascal généralisée **[A]**.
13. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ en fonction du cardinal de E (où E est un ensemble fini) **[A]**.
14. **(HP)** Formule de Vandermonde **[A]**.
15. « Formule de l'équiprobabilité » : si $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ **[A]**.
16. Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et si A est un événement de probabilité non nulle, alors $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ **[A]**.
17. Formule des probabilités totales sans et avec conditionnement **[A]**.
18. Formule des probabilités composées **[A]**.
19. **(HP)** Théorèmes de limite monotone (dans le contexte des probabilités) et corollaires **[A]**.
20. **(HP)** Conditions suffisantes de quasi-certitude et quasi-impossibilité **[A]**.

Exemples/ exercices

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}\left({}^tA\right) = \mathrm{Sp}(A)$ **[TD]**.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^tAA^tAA = I_n \Rightarrow A = I_n$ **[TD]**.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ **[TD]**.
   (b) Montrer que deux matrices semblables ont la même trace **[TD]**.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\left({}^tAA\right) = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ **[TD]**.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, si $\mathrm{card}(\mathrm{Sp}(A)) = n$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes **[TD]** :
   (i) $AB = BA$;
   (ii) Tout vecteur propre de A est un vecteur propre de B.
5. **(HP)** Une matrice nilpotente non nulle n'est pas diagonalisable **[C]** ;
6. On considère $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   - Déterminer le spectre de B **[C]**.
   - Déterminer les sous-espaces propres de B **[C]**.
   - Étudier la diagonalisabilité de B **[C]**.
   - Diagonaliser (sans contrainte) B **[C]**.
7. On considère $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   - Déterminer le spectre de J (méthode au choix) **[C]**.
   - Déterminer les sous-espaces propres de J **[C]**.
   - Étudier la diagonalisabilité de J **[C]**.
   - Montrer qu'il existe une matrice P carrée d'ordre 3 inversible dont tous les coefficients de la 1ère ligne sont égaux à 2 et une matrice D diagonale dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant telle que $J = PDP^{-1}$ **[C]**.
8. On considère la matrice $W = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et l'on admet que $\mathrm{Sp}(W) = \{-1\}$.
   Montrer que W n'est pas diagonalisable **[C]**.
9. Détermination de la nature de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{k^2 3^k}$ **[C]**.
10. Détermination de la nature de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \ln\left(1 + \dfrac{3}{k^4}\right)$ **[C]**.
11. Détermination de la nature de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \left(e^{1/k} - 1 - \dfrac{1}{k}\right)$ **[C]**.

12. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme **[C]** ;

13. Détermination de la nature de la série $\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}\right)$ **[C]**.

14. Déterminer le nombre d'anagrammes des mots MATHS et MATHEMATIQUES **[Ac]**.

15. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer simultanément 5 cartes dans un paquet comportant 52 cartes dont 26 sont de couleur rouge et 26 sont de couleur noire. Déterminer le nombre de tirages qui amènent 5 cartes de la même couleur **[Ac]**.

16. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer une infinité de fois la même pièce de monnaie. Écrire l'événement « Obtenir une infinité de *Pile* » à l'aide des événements auxiliaires P_i : « Obtenir *Pile* au $i$ème lancer » ($i \in \mathbb{N}^*$) **[C]**.

17. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard simultanément 4 boules dans une urne opaque contenant 6 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 6.

    1) Construire un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ modélisant l'expérience aléatoire **[C]**.
    2) Calculer la probabilité d'obtenir les boules 1, 2 et 3 au niveau du tirage **[Ac]**.
    3) Calculer la probabilité d'obtenir les boules 1 et 3 au niveau du tirage **[Ac]**.
    4) Calculer la probabilité d'obtenir 2 boules portant un numéro pair et 2 boules portant un numéro impair **[Ac]**.

18. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer n fois une même pièce de monnaie standard. Déterminer la probabilité que tous les lancers amènent le même résultat **[C]**.

19. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer successivement sans remise (jusqu'à épuisement des boules) 1 boule dans une urne comportant initialement N ($N \geqslant 2$) boules dont 1 seule est noire et $N-1$ sont blanches.
    Alors, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, la probabilité de tirer la boule noire au $k$ème tirage vaut $\frac{1}{N}$ **[C]**.

20. Soit $(a, b) \in]0, 1[^2$.
    On dispose de deux pièces A et B : A amène *Pile* avec la probabilité a, B amène *Pile* avec la probabilité b.
    On choisit au hasard une des deux pièces et on la lance.
    Si on obtient *Pile*, on garde la même pièce que l'on relance une nouvelle fois, sinon, on prend l'autre pièce que l'on lance.
    On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ adéquat.

    1) Déterminer la probabilité d'obtenir *Pile* lors du premier lancer **[C]**.
    2) Déterminer la probabilité d'obtenir *Pile* lors des deux lancers **[Ac]**.
    3) Déterminer la probabilité d'obtenir *Pile* lors du deuxième lancer **[Ac]**.

21. Donner un exemple de système complet d'événements comportant 4 événements, donner un exemple de système complet d'événements comportant une infinité d'événements **[C]** ;

22. Si on lance indéfiniment une même pièce de monnaie amenant *Pile* à chaque lancer avec la même probabilité $p \in]0, 1[$, alors la probabilité de n'obtenir que des *Pile* est nulle **[C]**+**[A]** (deux méthodes précisés) : l'une s'appuyant sur l'un des corollaires des théorèmes de limite monotone **(HP)**, l'autre non).

23. Soit $n \geqslant 2$. Soit $b \geqslant 2$.
    On effectue deux tirages successifs sans remise dans une urne comportant n boules noires et b boules blanches.
    On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
    Déterminer la loi de X **[C]**.

24. On lance 10 fois successivement le même dé octaédrique supposé parfaitement équilibré.
    On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a obtenu le chiffre 1 suite à ces 10 lancers.
    Déterminer la loi de X **[C]**.

25. Soit $n \geqslant 2$. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer successivement au hasard avec remise 2 boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 et à n.
    On appelle M la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros obtenus.
    Déterminer la loi de M **[C]**.

[A] : Annexe **Preuves** ;
[C] : Preuve traitée au tableau **en cours** ;
[Ac] : Annexe **Corrections**
[TD] : Travaux Dirigés

Informatique

Tout le contenu des polycopiés :

- **TP1 - Cours (rappels)** et **TP1 - Exercices**
- **TP2 - Algorithmique de listes (rappels)** [calcul du (second) minimum (et indices associés), (second) maximum (et indices associés), des valeurs les plus proches (et indices associés), recherche dichotomique dans une liste triée, algorithmes gloutons (« plus grand nombre », « déplacement d'une grenouille », rendu de monnaie, problème des conférenciers), algorithmes de tri **(HP)** (tri-bulles et tri-par-insertion)].
- **TP3 - Calculs numériques** [algorithme de dichotomie, méthode de point fixe, méthode de Newton-Raphson **(HP)**, méthode des rectangles permettant le calcul approché d'une intégrale sur un segment**(HP)**, application au calcul des valeurs approchées des valeurs prises par la fonction de répartition de toute variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ **(HP)**]

sont au programme de cette semaine (y compris toutes les extensions hors-programme **(HP)**).
On pourra proposer aux étudiants des questions de cours d'informatique et/ou des exercices, en s'inspirant très fortement des exercices présents dans les polycopiés susmentionnés.

Quelques remarques destinées aux colleurs

- La colle commencera par quelques questions de cours (restitution d'une définition, d'une proposition/théorème, d'une ou des méthodes de base, d'un exemple, d'un contre-exemple) ;
- On pourra demander aux élèves de prouver un des théorèmes (de manière complète ou incomplète) répertoriés dans la rubrique **Preuves exigibles** et tester la compréhension des élèves à propos de ce qu'ils écrivent ;
- On évitera autant que possible de consacrer plus d'une demi-heure aux questions de cours ;
- Le premier exercice sera de difficulté modérée, non théorique et sera essentiellement calculatoire ;
- Tous les élèves devront rencontrer dans leur colle :
  - une matrice dont on étudiera le caractère diagonalisable et que l'on diagonalisera si elle est diagonalisable ;
  - une série dont on déterminera la nature (et calculera éventuellement la somme) ;
  - un court et élémentaire exercice de probabilités (révisions du programme de 1ère année).
- On rappelle que le dénombrement n'est plus explicitement au programme de ECG Appli depuis 2013 : on évitera tout excès de technicité à ce sujet et le cœur de l'exercice de probabilité proposé aux élèves ne devra pas reposer sur un calcul de dénombrement subtil ;
- Les exercices proposés devront être de niveau progressif ;
- On accordera un soin tout particulier à la rédaction et à la rigueur ;
- Toute erreur répertoriée dans le document Erreurs graves sera lourdement sanctionnée ;
- Si l'élève interrogé ne répond pas correctement aux questions de cours, on attribuera une note strictement inférieure à la moyenne, et ce indépendamment de la suite de l'interrogation orale.